

一般選抜 前期 数学 (1日目)

【問題1】

次の問いに答えよ。

- (1) 次の式を計算せよ。

$$(3x^2 - 2x + 4) + 2(x^3 - x + 2) - 3(x^2 - x + 4)$$

- (2) 次の式を展開せよ。

$$(x^2 - 2x - 1)(x^2 - 2x - 2)$$

- (3) 次の式を因数分解せよ。

$$(x - y)(x - y - 2) - 8$$

- (4) 次の不等式を解け。

$$\frac{x+9}{3} \geq 2-x > \frac{3}{2}x + \frac{11}{3}$$

- (5) 次の実数の整数部分と小数部分を求めよ。

$$\frac{2}{\sqrt{3}-1}$$

【問題 2】

2 次関数 $f(x) = 3x^2 - 6x - 9$ のグラフについて次の問いに答えよ。

- (1) このグラフの頂点の座標を求めよ。
- (2) このグラフの x 軸との共有点の座標をすべて求めよ。
- (3) $f(x)$ のグラフを x 軸方向に -2 、 y 軸方向に 4 だけ平行移動したグラフの式を求めよ。

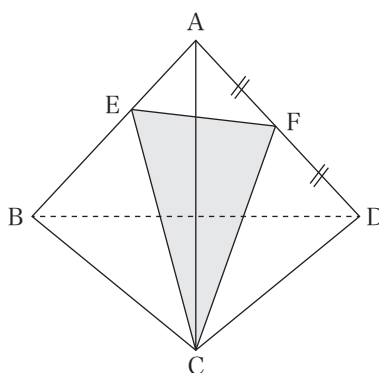
【問題 3】

1 辺の長さが 10 の正四面体 $ABCD$ において、辺 AB を $2:3$ に分ける点を E とし、辺 AD の中点を F とする。

(1) $\triangle CEF$ の 3 辺の長さをすべて求めよ。

(2) $\cos \angle CFE$ の値を求めよ。

(3) $\triangle CEF$ の面積を求めよ。



【問題 4】

1 から 100 までの番号をつけた 100 枚のカードから 1 枚を取り出すとき、その番号が 3 の倍数または 8 の倍数である確率を求めよ。

【問題 1 解答】

$$\begin{aligned}(1) \quad & (3x^2 - 2x + 4) + 2(x^3 - x + 2) - 3(x^2 - x + 4) \\ &= 3x^2 - 2x + 4 + 2x^3 - 2x + 4 - 3x^2 + 3x - 12 \\ &= 2x^3 - x - 4 \cdots \cdots (\text{答})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) \quad & (x^2 - 2x - 1)(x^2 - 2x - 2) \\ &= (x^2 - 2x)^2 - 3(x^2 - 2x) + 2 \\ &= x^4 - 4x^3 + 4x - 3x^2 + 6x + 2 \\ &= x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x + 2 \cdots \cdots (\text{答})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3) \quad & (x - y)(x - y - 2) - 8 \\ &= (x - y)^2 - 2(x - y) - 8 \\ &= (x - y + 2)(x - y - 4) \cdots \cdots (\text{答})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(4) \quad & \frac{x+9}{3} \geq 2-x \\ & x+9 \geq 6-3x \\ & 4x \geq -3 \\ & x \geq -\frac{3}{4}\end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned}2-x &> \frac{3}{2}x + \frac{11}{3} \\ 2-x &> \frac{9}{6}x + \frac{22}{6} \\ 12-6x &> 9x+22 \\ -15x &> 10 \\ x &< -\frac{2}{3}\end{aligned}$$

$$\text{よって、} -\frac{3}{4} \leq x < -\frac{2}{3} \cdots \cdots (\text{答})$$

$$(5) \frac{2}{\sqrt{3}-1} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{3-1} = \sqrt{3} + 1$$

$\sqrt{3}$ の整数部分は1、 $\sqrt{3}$ の小数部分は $\sqrt{3}-1$ なので、

$\frac{2}{\sqrt{3}-1}$ の整数部分は2、小数部分は $\sqrt{3}-1$ …… (答)

【問題2 解答】

(1) 2次関数 $f(x)$ を変形すると

$$f(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x-1)^2 - 12$$

となる。よって、頂点の座標は (1, -12) …… (答)

(2) x 軸との共有点の y 座標は 0 であるから、

$$3x^2 - 6x - 9 = 0$$

$$(x-3)(x+1) = 0$$

となる。よって、共有点の座標は (3, 0) と (-1, 0) の2つ…… (答)

(3) (1)で求めた頂点の座標は(1, -12)であるから、平行移動したグラフの頂点の座標は(-1, -8)となる。

よって、平行移動したグラフの式は $3(x+1)^2 - 8 = 3x^2 + 6x - 5$ …… (答)

【問題3 解答】

(1) $\triangle AEF$ において $\angle EAF$ は 60° であるから、余弦定理により

$$\begin{aligned} EF^2 &= AE^2 + AF^2 - 2AE \cdot AF \cos \angle EAF \\ &= \left(10 \cdot \frac{2}{5}\right)^2 + \left(10 \cdot \frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(10 \cdot \frac{2}{5}\right)\left(10 \cdot \frac{1}{2}\right) \cos 60^\circ \\ &= 21 \end{aligned}$$

同様に、

$$\begin{aligned}
 CE^2 &= BE^2 + BC^2 - 2BE \cdot BC \cos \angle EBC \\
 &= \left(10 \times \frac{3}{5}\right)^2 + (10)^2 - 2\left(10 \times \frac{3}{5}\right)(10) \cos 60^\circ \\
 &= 76
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 CF^2 &= CD^2 + DF^2 - 2CD \cdot DF \cos \angle CDF \\
 &= (10)^2 + \left(10 \times \frac{1}{2}\right)^2 - 2(10)\left(10 \times \frac{1}{2}\right) \cos 60^\circ \\
 &= 75
 \end{aligned}$$

となる。

辺の長さは正なので、 $EF = \sqrt{21}$ 、 $CE = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}$ 、 $CF = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$ ……
(答)

(2) $\triangle CEF$ に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned}
 \cos \angle CFE &= \frac{EF^2 + CF^2 - CE^2}{2 \cdot EF \cdot CF} \\
 &= \frac{21 + 75 - 76}{10 \sqrt{21} \sqrt{3}} \\
 &= \frac{2\sqrt{7}}{21} \dots\dots (\text{答})
 \end{aligned}$$

(3) (2) で求めた $\cos \angle CFE$ より

$$\sin \angle CFE = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \angle CFE} = \pm \frac{\sqrt{413}}{21}$$

$\angle CFE < 180^\circ$ であるから

$$\sin \angle CFE = \frac{\sqrt{413}}{21}$$

となる。

$$\text{よって、} \triangle CEF = \frac{1}{2} \cdot EF \cdot CF \cdot \sin \angle CFE = \frac{5\sqrt{59}}{2} \dots\dots (\text{答})$$

【問題 4 解答】

1 から 100 まで数の中に、3 の倍数は 33 個、8 の倍数は 12 個、24 の倍数は 4 個含まれている。

$$\text{よって、} \frac{33}{100} + \frac{12}{100} - \frac{4}{100} = \frac{41}{100} \dots\dots (\text{答})$$