

# 一般選抜 前期 数学 (1日目)

## 【問題1】

次の問いに答えよ。

- (1)  $(x^2 + 4x - 3)(x^2 + 4x + 2)$  を展開せよ。
- (2)  $3x^2 + 5xy - 5x - 2y^2 + 4y - 2$  を因数分解せよ。
- (3)  $10101_{(2)} \times 1100_{(2)}$  の計算の結果を、2進法で表せ。
- (4) 630 と 1650 の最大公約数を求めよ。
- (5)  $a$  と  $b$  は整数とする。 $a$  を 5 で割ると 3 余り、 $b$  を 5 で割ると 4 余る。このとき、 $ab$  を 5 で割ったときの余りを求めよ。

【問題 2】

関数  $f(x) = x^2 - 6x - 7$  について、次の問いに答えよ。

- (1) 関数  $y=f(x)$  のグラフの頂点の座標を求めよ。
- (2) 関数  $y=f(x)$  のグラフと  $x$  軸の共有点の  $x$  座標をすべて求めよ。
- (3) 関数  $y=f(x)$  のグラフと直線  $y = -2x - k$  ( $k$  は定数) が接するとき、定数  $k$  の値を求めよ。
- (4)  $f(x)$  の  $-1 \leq x \leq 5$  における最大値と最小値を求めよ。また、そのときの  $x$  の値を求めよ。

【問題 3】

$\triangle ABC$  において、 $BC = 3$ 、 $\angle A = 60^\circ$ 、 $\angle B = 30^\circ$  のとき、以下の問いに答えよ。ただし、円周率は  $\pi$  とする。

- (1) 辺  $AC$  の長さを求めよ。
- (2)  $\triangle ABC$  の外接円の半径を求めよ。
- (3)  $\triangle ABC$  の内接円の面積を求めよ。

#### 【問題4】

A、B、C、D、E、Fの6人で旅行に行き、宿泊するホテルの101号室と102号室の2つの部屋を予約した。これについて次の問いに答えよ。

- (1) 空室を作ってもよいとすると、6人が101号室、102号室に分かれて泊まる方法は全部で何通りあるか。
- (2) 空室を作らないようにして、6人が101号室、102号室に分かれて泊まる方法は全部で何通りあるか。
- (3) 101号室に2人、102号室に4人が分かれて泊まる方法は全部で何通りあるか。
- (4) A、Bの2人はリーダーとして分かれて泊まることにした。残りの4人は2人ずつに分かれ、リーダーを含めて各部屋3人ずつ101号室、102号室に分かれて泊まる方法は全部で何通りあるか。

【問題 1 解答】

(1)

$$\begin{aligned}(x^2 + 4x - 3)(x^2 + 4x + 2) &= \{(x^2 + 4x) - 3\}\{(x^2 + 4x) + 2\} \\ &= (x^2 + 4x)^2 - (x^2 + 4x) - 6 \\ &= (x^4 + 8x^3 + 16x^2) - x^2 - 4x - 6 \\ &= x^4 + 8x^3 + 15x^2 - 4x - 6 \cdots \cdots \text{(答)}\end{aligned}$$

(2)

$x$ について整理すると、

$$\begin{aligned}3x^2 + 5xy - 5x - 2y^2 + 4y - 2 \\ &= 3x^2 + 5x(y - 1) - 2(y^2 - 2y + 1) \\ &= 3x^2 + 5x(y - 1) - 2(y - 1)^2 \\ &= \{3x - (y - 1)\}\{x + 2(y - 1)\} \\ &= (3x - y + 1)(x + 2y - 2) \cdots \cdots \text{(答)}\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}10101_{(2)} &= 21_{(10)} \\ 1100_{(2)} &= 12_{(10)} \\ 21_{(10)} \times 12_{(10)} &= 252_{(10)} = 11111100_{(2)} \cdots \cdots \text{(答)}\end{aligned}$$

(4)

それぞれ素因数分解すると、

$$\begin{aligned}630 &= 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 \\ 1650 &= 2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 11 \\ \text{よって、最大公約数は} &2 \times 3 \times 5 = 30 \cdots \cdots \text{(答)}\end{aligned}$$

(5)

$k, l$ を整数とすると、 $a = 5k + 3, b = 5l + 4$ と表せる。

$$\begin{aligned}ab &= (5k + 3)(5l + 4) \\ &= 25kl + 20k + 15l + 12 \\ &= 5(5kl + 4k + 3l + 2) + 2 \\ \text{よって、5で割った時の余りは} &2 \cdots \cdots \text{(答)}\end{aligned}$$

【問題 2 解答】

(1)右辺を変形すると、 $f(x) = (x - 3)^2 - 16$  より頂点の座標は  
(3, -16)  $\cdots \cdots$  (答)

(2)  $x$ 軸との共有点なので、 $f(x) = x^2 - 6x - 7 = 0$  とおくと、  
 $x^2 - 6x - 7 = 0$   
 $(x + 1)(x - 7) = 0$   
 $x = -1, 7$  より、求める  $x$  座標の値は  $-1, 7$ …… (答)

(3)  $f(x)$ と直線の方程式を連立させると  
 $x^2 - 6x - 7 = -2x - k$   
 $x^2 - 4x - 7 + k = 0$   
放物線と直線は接するので判別式  $D=0$  となる。  
よって、 $D = 16 - 4(-7 + k)$   
 $16 + 28 - 4k = 0$   
 $4k = 44$   
 $k = 11$ …… (答)

(4)この関数は下に凸の 2 次関数であり、定義域は  $-1 \leq x \leq 5$ なので、  
 $x = -1$  のとき、最大値 0  
 $x = 3$  のとき、最小値  $-16$   
をとる。…… (答)

**【問題 3 解答】**

(1)  
 $\tan 60^\circ = \frac{BC}{AC}$ 、 $AC = \frac{BC}{\tan 60^\circ}$  より  
 $\frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ …… (答)

(2)  
外接円の半径を  $R$  とすると、正弦定理より  $2R = \frac{3}{\sin 60^\circ} = \frac{3 \times 2}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$   
よって、外接円の半径は  $\sqrt{3}$ …… (答)

(3)  
内接円の半径を  $r$  とすると、  
 $\triangle ABC$  の面積  $S = \frac{r}{2}(AB + BC + AC)$  より  
 $r = 2S/(AB + BC + AC)$   
 $= 2 \times (\frac{1}{2} \times 3 \times \sqrt{3}) / (3 + \sqrt{3} + 2\sqrt{3})$

$$\begin{aligned} &= \frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}+3} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{3-\sqrt{3}}{3-1} \\ &= \frac{1}{2}(3-\sqrt{3}) \text{となる。} \end{aligned}$$

よって、円の面積は、

$$\begin{aligned} \pi r^2 &= \pi \times \left\{ \frac{1}{2}(3-\sqrt{3}) \right\}^2 = \frac{1}{4}(9-6\sqrt{3}+3)\pi = \frac{1}{4}(12-6\sqrt{3})\pi \\ &= \frac{1}{2}(6-3\sqrt{3})\pi \\ &= \frac{3}{2}(2-\sqrt{3})\pi \cdots \cdots \text{(答)} \end{aligned}$$

**【問題 4 解答】**

(1) 1 人につき入る部屋は 2 通りで、6 人いるので、  
 $2^6=64$  通り…… (答)

(2) の分け方で 101 号室が 0 人になるのが 1 通り、102 号室が 0 人になるのは 1 通りなので、それらを引くと  $64-2=62$  通り…… (答)

(3) 101 号室に 6 人から 2 人、102 号室に残りの 4 人が入るので、分け方は  
 ${}_6C_2 = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$  通り…… (答)

(4) A、B の 2 人をリーダーとして部屋を分け、残りの 4 人を 101 号室に 2 人、102 号室に 2 人を入れる分け方は、 ${}_4C_2 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$  通り。  
101 号室と 102 号室の部屋を入れ替えると  $6 \times 2 = 12$  通り…… (答)